Constantin Onu, Carmen-Ştefania Onu, Maria Pascu.

TEME PERSONALIZATE LA MATEMATICĂ

Clasa a IX-a M2

2011.

„În matematică nu există compromis
între adevăr şi eroare".
Viète.

Introducere

În practica predării matematicii se obişnuieşte ca după fiecare lecţie predată, profesorul să stabilească pentru elevi anumite sarcini de lucru individuale în concordanţă cu conţinutul predat, cu anumite obiective didactice urmărite şi cu nivelul mediu al clasei. Există argumente puternice care susţin necesitatea utilizării temelor individuale date elevilor spre rezolvare acasă.

Propunem o metodă originală de organizare a unui sistem de **teme personalizate la matematică pentru acasă.** În principiu, sistemul propus conţine câte o temă pentru fiecare lecţie. Chiar numerotarea temei va fi formată din numărul săptămânii urmat de numărul orei din săptămână. Denumirea temei este urmată de referirea la conţinutul lecţiei astfel încât elevul să ştie şi sursa din care urmează a se documenta. Conţinutul temei va fi alcătuit din una, două sau cel mult trei probleme care să aibă un anumit **tip de formulare:**

- Datele problemei conţin spaţii lăsate libere pentru a fi completate de către elev cu numere dintr-un anumit domeniu precizat.
- Întrebările sunt organizate în unităţi care urmăresc, în principiu, firul logic al lecţiei.
- Dificultatea întrebărilor creşte gradual.
- Întrebările urmăresc observarea anumitor proprietăţi, compararea unor rezultate, sugerarea unor generalizări, găsirea unor căi mai simple de rezolvare.
- Modul de adresare este la persoana întâia pentru a sublinia caracterul personalizat, individual al activităţii de învăţare.

Temele vor fi distribuite elevilor pentru un capitol întreg înainte de începerea lecțiilor acelui capitol sau chiar la începutul anului şcolar pentru toate lecțiile. În acest mod se asigură pe de o parte confortul elevului, care va şti ce are de făcut o bună perioadă de timp şi va fi pus în situația de a-şi organiza corespunzător timpul de lucru, iar pe de altă parte profesorul va avea grijă să-şi organizeze lecțiile în concordanță cu ritmul temelor propuse, deci să respecte planificarea. Temele sunt uşor de verificat şi evaluat numeric şi chiar calitativ. Nu se exclude colaborarea între elevi.

Setul de teme este însoțit de **un set de rezolvări** pentru a fi un ajutor pentru toți elevii, dar mai ales pentru cei care întâmpină dificultăți, însă se admit şi alte metode de rezolvare.

Faptul că fiecare elev îşi alege valorile inițiale de lucru sugerează un anumit grad de generalitate pentru tipul de probleme propus. Elevii buni vor avea tendința şi libertatea să rezolve problemele (sau unele dintre acestea) în cazul general, atribuind valorile în final.

Trebuie să precizăm că setul de teme va reprezenta obligația minimă a fiecărui elev, urmând ca, în funcție de situație, profesorul să propună şi alte probleme, pentru toți elevii sau numai pentru unii. Profesorul are posibilitatea să acopere principalele tipuri de probleme şi exerciții care corespund lecției şi are libertatea de a completa sau diminua temele de la anumite lecții făcând precizări suplimentare la timpul potrivit.

Setul de teme propus este organizat în concordanță cu structura anului şcolar 2011/ 2012 şi cu programa şcolară valabilă pentru clasele a IX-a cu profil tehnologic care au în planul de învățământ câte 3 ore pe săptămână.

Constantin Onu.

I. Mulțimi şi elemente de logică matematică.
Temele 1.1.-5.3.

Tema 1.1.

Mulțimea numerelor reale. Operații algebrice cu numere reale.

1.Se dau numerele *a*=…., *b*=….., *c*= -….., *d*= -…., unde vei pune numere naturale nenule diferite în spațiile libere şi modelul de tabel

N	Z	Q	R\Q

în care vei înscrie cele 4 numere şi fiecare dintre rezultatele de mai jos.

a)Calculează $a+b$, $a+c$, $a-b$, $a+b+c$, $a+b-c$, $a+b-(c+d)$ şi scrie rezultatele în tabel.

b)Calculează $a\cdot b$, $a\cdot c$, $a\cdot(-b)$, $a+b\cdot c$, $a\cdot(b-c)$, $a\cdot b-c\cdot d$ şi scrie rezultatele în tabel.

c) Calculează cu cel puțin o zecimală $a:b$, $b:a$, $a:c$, $a:(-b)$, $a:b\cdot c$, $a\cdot b:c$, $a:b-c:d$ şi scrie rezultatele în tabel.

d) Calculează cu cel puțin o zecimală a^2, $(a+b)^2$, a^2+c^2, $(a+c)^2$, a^3, a^{-1} , c^{-2} şi scrie rezultatele în tabel.

e)Calculează cu cel puțin o zecimală $\sqrt{a}$, $\sqrt{b^2}$, $\sqrt{c^2}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{a\cdot b}$-$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ şi scrie rezultatele în tabel.

Tema 1.2.

Ordonarea numerelor reale.

1.Se dau numerele *m*=…., *n*=….., *p*= -…., *q*= -…., unde vei pune numere naturale nenule diferite în spațiile libere.

a)Calculează $m+2n$, $p-2q$, $m+n+p$, $m+n-(p+q)$ şi reprezintă numerele obținute pe o axă reală.
b)Calculează $m\cdot n$, $m\cdot p$, $m\cdot(-q)$, $m+n\cdot p$, $m\cdot(p-q)$, $m\cdot n-p\cdot q$ apoi scrie aceste numere în ordine crescătoare.
c) Calculează cu cel puțin o zecimală $m:n$, $m:p$, $m:n\cdot p$, $m:n+p:q$ apoi scrie aceste numere în ordine descrescătoare.
c) Calculează cu cel puțin o zecimală m^2, $(m+p)^2$, m^3, m^{-1} , p^{-2} apoi scrie aceste numere în ordine crescătoare.
d)Calculează cu cel puțin o zecimală

$$\sqrt{m}, \sqrt{n^2}, \sqrt{p^2}, \sqrt{m+n}, \sqrt{\frac{m}{n}}, \sqrt{m\cdot n}\text{-}\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}$$

apoi scrie aceste numere în ordine descrescătoare.

Tema 1.3.

Modulul unui număr real.

1.Se dau numerele a=…., b= -….., unde vei pune numere naturale nenule diferite în spațiile libere.
a) Compară $|a+b|$ cu $|a|+|b|$.
b) Compară $|a-b|$ cu $|a|-|b|$.
c) Compară $|a\cdot b|$ cu $|a|\cdot|b|$.
d) Compară $|a:b|$ cu $|a|:|b|$.
e) Compară $|a^2|$ cu $|a|^2$ şi $|b^2|$ cu $|b|^2$.
e) Compară $|a^{-1}|$ cu $|a|^{-1}$.
f) Compară $|\sqrt{a}|$ cu $\sqrt{|a|}$.
g) Găseşte cel puțin un număr real c pentru care $|a+c|<|a|+|c|$.

Tema 2.1.

Aproximări prin lipsă sau prin adaos.

1.Desenează un triunghi oarecare ABC şi notează lungimile laturilor BC=a, AC=b şi AB=c.
a)Măsoară lungimile laturilor triunghiului.
b)Desenează şi măsoară înălțimile triunghiului, notate cu h_a, h_b şi h_c .

c)Calculează $\frac{a \cdot h_a}{2}$, $\frac{b \cdot h_b}{2}$ şi $\frac{c \cdot h_c}{2}$.
d)Calculează semiperimetrul

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

şi aria triunghiului cu formula

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

e)Compară rezultatul obținute la punctul **c)** cu rezultatele de la punctul **d)** şi propune o metodă cât mai precisă de calcul a ariei unui triunghi.

Tema 2.2.

Operații cu intervale de numere reale.

1.Se dau intervalele I=(…..;….), J=[….;….), K=(…;+∞) şi L=(-∞;…] unde vei scrie numere reale diferite în locurile libere.

a)Reprezentă cele 4 intervale pe axa reală.
b)Determină $I \cup J$, $I \cap K$, $J \cap L \cup K$.
c)Determină $Z \cap I$, card($J \cap N$) şi $Z \cap (I \cup J)$.
d)Află $(Z \cap I) \setminus (Z \cap J)$ şi $(Z \cap J) \setminus (Z \cap I)$.
e)Reprezintă grafic produsul cartezian
$(Z \cap I)$x$(Z \cap J)$.

Tema 2.3.

Evaluare.

I.Se dau numerele raționale a=0,□ ; b=0,□□□; c=0,□□; d= $\frac{2}{5}$, unde vei scrie cifre diferite în locurile libere. Fără a folosi calculatorul, calculează:

1. $a+b$
2. a-c
3. c-b
4. $a+d$
5. $2a$-$5b$

6. Cât este suma dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre numerele date ?
7. $a \cdot c$
8. $b \cdot d$
9. $b:d$

II. Se dau numerele p=… şi q= - ….., unde în locurile libere vei scrie numere reale nenule diferite. Fără a folosi calculatorul, calculează:
1. $2:p \cdot q$
2. p^2
3. q^3
4. p^{-1}
5. p^{-2}
6. $p:q-q:p$
7. $\sqrt{p}$ (cu cel puțin două zecimale)
8. $\sqrt{p^2+q^2}-(\sqrt{p^2}+\sqrt{q^2})$
9. $\sqrt{p^2+q^2+2pq}-\sqrt{p^2+q^2-2pq}$

Tema 3.1.

Propoziție. Predicat.

1. Se dau predicatele definite pe Z astfel: *p(x)*: *”…*$\cdot x$+1 *este număr prim”* şi $q(x)$: "$\frac{\dots x-\dots}{x+\dots}$∈Z” în care vei pune numere naturale nenule diferite în locurile libere.
a) Scrie propozițiile $p(1)$ şi $q(2)$, apoi precizează valoarea de adevăr pentru fiecare.
b)Completează tabelul următor cu *A* dacă propozițiile sunt adevărate sau cu *F* dacă sunt false, pentru valorile date ale lui *x*.

x	*p(x)*	*q(x)*	$\rceil p(x)$	$p(x) \wedge q(x)$	$p(x) \vee q(x)$	$p(x) \rightarrow q(x)$
1						
3						
0						

c)Verificați dacă există o valoare a lui x pentru care predicatele $p(x)$ şi $p(x)$ să fie adevărate şi exprimați concluzia sub forma unei propoziții logice.

Tema 3.2.

Cuantificatori.

1.Se dau predicatele $p(x)$: ”$\ldots\cdot x^2-\ldots x+\ldots=0$, $x\in\mathrm{R}$” şi $q(x)$: „$\ldots x< 10+\ldots$, $x\in\mathrm{R}$” în care vei pune numere naturale nenule diferite în locurile libere.

a) Scrie propozițiile $p(1)$ şi $q(2)$, apoi precizează valoarea de adevăr pentru fiecare.

b)Determină mulțimile pe care sunt adevărate cele două predicate.

c)Verifică dacă sunt adevărate predicatele $(\forall x)p(x)$, $(\exists x)q(x)$, $(\forall x)\rceil q(x)$, $(\exists x)\rceil p(x)$, $(\forall x)\,(p(x)\vee q(x))$.

Tema 3.3.

Operații logice elementare (negație, conjuncție disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile şi relațiile cu mulțimi.

1.Se dau mulțimile de numere $A=\{\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots\}$ şi $B=\{\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots\}$ în care vei pune numere întregi în locurile libere şi predicatele $p(x)$: „$x\in A$” şi $q(x)$: „$x\in B$”.

a)Comparați mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)\wedge q(x)$ cu mulțimea $A\cap B$.

b) Comparați mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)\vee q(x)$ cu mulțimea $A\cup B$.

c) Comparați mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)\wedge\rceil q(x)$ cu mulțimea $A\backslash B$.

d) Comparați mulțimea de adevăr a predicatului $\rceil p(x)\wedge\rceil q(x)$ cu mulțimea $\mathrm{N}\backslash(A\cup B)$.

Tema 4.1.

Exerciții cu operații logice elementare.

1. Se dau predicatele $p(x)$: ”$|\dots x-\dots|<\dots$, $x\in\mathrm{R}$” şi $q(x)$: „$\dots-\dots x^2 \geq -\dots$, $x\in\mathrm{R}$” în care vei pune numere naturale nenule diferite în locurile libere.

a) Găseşte o valoare a lui x pentru a arăta că propoziția $\exists x,\ p(x)$ este adevărată.

b) Găseşte o valoare a lui x pentru a arăta că propoziția $\forall x,\ q(x)$ este falsă.

c) Dă două valori lui x, scrie propozițiile obținute din predicatele date şi completează tabelul următor cu *A* pentru propozițiile adevărate şi cu *F* pentru cele false.

x	Predicatul $p(x)$		Predicatul $q(x)$	
	propoziția	*A/F*	propoziția	*A/F*

Tema 4.2.

Complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate.

1. Se dau mulțimile $A_n=\{n;\ \dots n+\dots;\ \dots n^2+\dots;\ \dots n^2+\dots n\}$ în care vei pune numere naturale nenule diferite în locurile libere.

a) Determină elementele mulțimilor A_0, A_1 şi A_2.

b) Află $A_0\cup A_1$, $A_0\cap A_1$, $A_0\cup(A_1\cap A_2)$.

c) Demonstrează că mulțimea $C_N(A_0\cup A_1\cup\dots\cup A_9\}$ este nevidă.

d) Demonstrează că propoziția „$\exists i\in\mathrm{N}$, $\exists j\in\mathrm{N}$, $i\neq j$, încât $A_i\subset A_j$” este falsă.

Tema 4.3.

Evaluare.

1. Se dă propoziția p: „$\dots<\dots$ ” şi predicatele $q(x)$: „$\dots-\dots x>\dots$” şi $r(x)$: „$\dots x-\dots<\dots$ „ cu $x\in\mathrm{R}$, în care vei pune numere naturale nenule diferite în locurile libere.

Află valoarea de adevăr (*A* sau *F*) pentru fiecare dintre propozițiile următoare:

1)	$\rceil p$	
2)	$q(2)$	
3)	$\rceil r(0)$	
4)	$p \vee q(1)$	
5)	$r(3) \wedge p$	
6)	$p \rightarrow q(0)$	
7)	$r(4) \vee \rceil q(-1)$	
8)	$\exists x, \quad r(x) \wedge q(x)$	
9)	$\forall x, \quad p \vee q(x) \vee r(x)$	

Tema 5.1.

Raționament prin reducere la absurd.

1.Fie numărul n= …… (în locul liber scrie un număr natural mai mare decât 20).

a)Calculează suma primelor n numere naturale impare S=1+3+5+….+(2n-1).

b)Demonstrează prin reducere la absurd propoziția : „Dacă suma a n numere naturale impare oarecare este S-2 atunci să se arate că cel puțin două dintre ele sunt egale”, în care valorile pentru n şi S sunt cele de la punctul a).

2.Există un număr natural n care împărțit la i =……. dă restul r_1 =…… şi împărțit la j=……. dă restul r_2= …..? (vei scrie în spațiile libere numere naturale diferite mai mari decât 15 astfel încât $i>r_1$ şi $j>r_2$).

Tema 5.2.

Inducția matematică.

1.Se dă numărul $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi un dreptunghi $ABCD$ cu lățimea $BC=a$=….cm., (unde vei pune un număr în locul liber astfel încât dreptunghiul să poată fi desenat pe caiet) şi cu lungimea $AB=b=a\cdot\varphi$.

a)Calculează b şi desenează cât mai exact dreptunghiul $ABCD$.

b)Împarte dreptunghiul *ABCD* într-un pătrat *AEFD* şi un dreptunghi *EBCF*. Măsoară laturile noului dreptunghi *EBCF*, şi notează lățimea lui $EB=a_1$ şi lungimea acestuia, $BC=b_1$. Calculează raportul $\frac{b_1}{a_1}$ şi compară valoarea obținută cu valoarea raportului $\frac{b}{a}$.

c)Repetă operațiile de la punctul b) împărțind dreptunghiul *EBCF* într-un nou pătrat şi un nou dreptunghi cu laturile a_2 şi b_2. Calculează raportul $\frac{b_2}{a_2}$ şi compară-l cu $\frac{b}{a}$.

d)Presupunând că repetăm împărțirile dreptunghiurilor, ca mai sus, de un număr de n ori, $n\in$N, să se demonstreze că $\frac{b_n}{a_n}=\frac{b}{a}=\varphi$.

Tema 5.3.

Evaluare.

1.Se dă predicatul $p(x)$: „$\frac{\ldots x-\ldots}{x+\cdots}\in Z$”, definit pe Z, unde vei scrie numere naturale nenule diferite în spațiile libere.

a)Verifică dacă propoziția $p(1)$ este adevărată.

b)Găseşte două valori diferite, a şi b, dacă există, pentru care $p(a)\vee p(b)$ este adevărată.

c)Găseşte două valori diferite, c şi d, dacă există, pentru care $p(a)\wedge p(c)$ este falsă.

d)Găseşte două valori diferite, e şi f, dacă există, pentru care $p(e)\rightarrow p(f)$ este adevărată.

e)Găseşte $g\in$Z , dacă există, pentru care $p(g)\vee \rceil p(h)$ este adevărată pentru $\forall h\in$Z.

f)Verifică dacă $p(-2)\wedge p(-1)$ este falsă.

g)Demonstrează dacă $\exists x$, $p(x)$ este adevărată.

h)Demonstrează dacă $\forall x$, $\rceil p(x)$ este adevărată.

i)Demonstrează dacă $p(n)\wedge p(n+1)$ este falsă pentru orice $n\in$N.

Rezolvările temelor 1.1.-5.3.

Rezolvarea temei 1.1.

Mulțimea numerelor reale. Operații algebrice cu numere reale.

1.Fie, de exemplu, numerele a=2, b=7, c= -4, d= -6.

N	Z	Q	R\Q
$a+b=9$	$a+c=-2$	$a:b=0{,}28..$	$\sqrt{a} = 1{,}41..$
$a+b+c=5$	$a-b=-5$	$b:a=3{,}5$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0{,}53..$
$a+b-c=15$	$a\cdot c=-8$	$a:c=-0{,}5$	
$a+b-(a+b)=19$	$a\cdot(-b)=-14$	$a:(-b)=-0{,}28..$	
$a\cdot b=14$	$a+b\cdot c=-26$	$a:b\cdot c=-1{,}14..$	
$a\cdot(b-c)=22$	$a\cdot b-c\cdot d=-10$	$a\cdot b:c=-3{,}5$	
$a^2=4$		$a:b-c:d=-0{,}38\ldots$	
$(a+b)^2=81$		$a^{-1}=1:2=0{,}5$	
$(a+c)^2=4$		$c^{-2}=-0{,}0625$	
$a^3=8$			
$\sqrt{b^2}=7$			
$\sqrt{c^2}=4$			
$\sqrt{a+b} = 3$			
$\sqrt{a\cdot b}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=0$			

a)Obținem: $a+b=2+7=9\in N$, $a+c=2-4=-2\in Z$, $a-b=2-7=-5\in Z$, $a+b+c=2+7-4=5\in N$, $a+b-c=2+7+6=15\in N$, $a+b-(c+d)=9+10=19\in N$.

b)Efectuând înmulțirile obținem: $a\cdot b=2\cdot 7=14$, $a\cdot c=2\cdot(-4)=-8\in Z$, $a\cdot(-b)=2\cdot(-7)=-14\in Z$, $a+b\cdot c=2+7\cdot(-4)=2-28=-26\in Z$, $a\cdot(b-c)= 2\cdot(7+4)= 2\cdot 11= 22\in N$, $a\cdot b-c\cdot d=2\cdot 7-(-4)\cdot(-6)=14-24=-10\in Z$.

c) Calculând cu cel puțin o zecimală obținem $a:b=2:7=0{,}1..\in Q$, $b:a=7:2=5{,}3\in Q$, $a:c=2:(-4)=-0{,}5\in Q$, $a:(-b)=2:(-7)= -0{,}1..$, $a:b\cdot c=-1{,}14..\in Q$, $a\cdot b:c=-3{,}5\in Q$, $a:b-c:d \cong -0{,}38\ldots\in Q$.

d)Avem: $a^2=2^2=2\cdot 2=4\in N$, $(a+b)^2=(2+7)^2=9^2=81\in N$, $a^2+c^2=4+16=20$, $(a+c)^2=(2-4)^2=(-2)^2=4\in N$, $a^3=2^3=8\in N$, $a^{-1}=1:2=0{,}5\in Q$, $c^{-2}=1:(-4)^2=1:(-16)=-0{,}0625\in Q$.

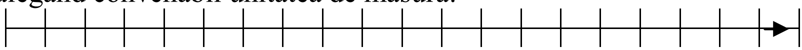
e)Găsim: $\sqrt{a} = \sqrt{2} = 1{,}41..$ $\in$R\Q, $\sqrt{b^2}$ =|b|=7$\in$N, $\sqrt{c^2}$ =|-4|=4$\in$N, $\sqrt{a+b} = \sqrt{9} = 3$ $\in$N, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{0{,}2857..} = 0{,}53..$ $\in$R\Q, $\sqrt{a \cdot b}$-$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ =0$\in$N, deoarece $\sqrt{a \cdot b}$=$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Rezolvarea temei 1.2.

Ordonarea numerelor reale.

1.Fie *m*=5, *n*=3, *p*= -4, *q*= -7.

a)Calculăm m+2n=5+6=11, *p*-2*q*=-4+14=10, *m*+*n*+*p*=5+3-4=4, *m*+*n*-(*p*+*q*)=5+3+11=19 şi reprezentăm numerele obținute pe o axă reală, alegând convenabil unitatea de măsură:



0 4 10 11

19

b)Calculăm *m·n=15*, *m·p=-20*, *m·(-q)=35*, *m*+*n·p*=5+3·(-4)=5-12=-7, *m*·(*p-q*)=5·(-4+7)=5·3=15, *m·n-p·q*=5·3-(-4)·(-7)=15-28=13. În ordine crescătoare avem: -20; -7; 13; 15; 15; 35.

c) Calculăm *m*:*n*=5:3=1,(6), *m*:*p*=5:(-4)=-1,25, *m*:*n·p*=1,66·(-4)=-6,(6), *m*:*n*+*p*:*q*=5:3+(-4):(-7)=7,238... şi ordonez descrescător: 7,238… ; 1,(6); -1,25; -6,(6).

c) Obținem $m^2=5^2=25$; $(m+p)^2=(5-4)^2=1^2=1$; $m^3=5^3=125$; m^{-1}=1:5=0,2 ; $p^{-2}=1:(-4)^2$=1:16=0,0625, care se ordonează crescător astfel: 0,0625 ; 0,2; 1; 25;125.

d)Se obține: $\sqrt{m} = \sqrt{5} \cong 2{,}23$; $\sqrt{n^2}$ =|3|=3, $\sqrt{p^2} = |-4| = 4$, $\sqrt{m+n} = \sqrt{8} \cong 2{,}828$, $\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1{,}29$, $\sqrt{m \cdot n}$ - $\sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$ =0 deoarece $\sqrt{m \cdot n}$=$\sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$. În ordine descrescătoare obținem: $\sqrt{p^2} = 4$; $\sqrt{n^2} = 3$; $\sqrt{m+n} \cong 2{,}828$; $\sqrt{m} \cong 2{,}23$; $\sqrt{\frac{m}{n}} = 1{,}29$; $\sqrt{m \cdot n}$ - $\sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$=0

Rezolvarea temei 1.3.

Modulul unui număr real.

1.Fie numerele *a*=7, *b*= -12.

a) |*a*+*b*|=|7-12|=|-5|=5, |*a*|+|*b*|=|7|+|-12|=7+12=19, deci|*a*+*b*|<|*a*|+|*b*|.

b) |*a*-*b*| =|7+12|=|19|=19, |*a*|-|*b*|=|7|-|-12|=7-12=-5, deci |*a*-*b*|>|*a*|-|*b*|.

c) |*a*·*b*|=|7·(-12)|=|-84|=84, |*a*|·|*b*|=|7|·|-12|=7·12=84, deci |*a*·*b*|=|*a*|·|*b*|.

d) $|a:b|=|7:(-12)|=|-(7:12)|=7:12$, $|a|:|b|=|7|:|-12|=7:12$, deci $|a:b|=|a|:|b|$.

e) $|a^2|=|49|$ cu $|a|^2=7^2=49$ deci $|a^2|=|a|^2$. Asemănător, $|b^2|=|(-12)^2|=144$ şi $|b|^2=12^2=144$ deci $|b^2|=|b|^2$.

e)Avem $|a^{-1}|=|1:7|=1:7$ deoarece $1:7>0$ şi $|a|^{-1}=7^{-1}=1:7$, deci $|a^{-1}|=|a|^{-1}$.

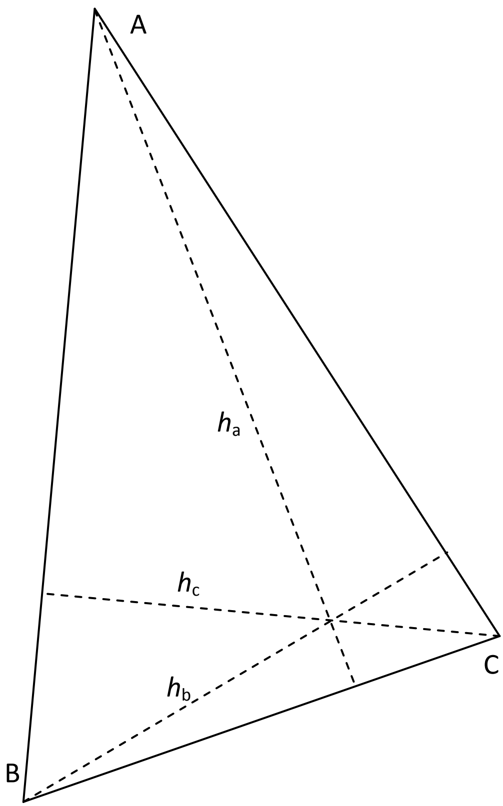
f) Deoarece$\sqrt{7}>0$ avem $\left|\sqrt{7}\right|=\sqrt{7}$, iar $\sqrt{|7|}=\sqrt{7}$ deci $|\sqrt{a}|=\sqrt{|a|}$.

g) Pentru oricare valoare reală negativă, $c<0$, avem $|a+c|<|a|+|c|$, de exemplu pentru $c=-2$, $|7-2|<|7|+|-2|$.

Rezolvarea temei 2.1.

Aproximări prin lipsă sau prin adaos.

1.Fie triunghiul *ABC*.



a)Măsurând cu rigla lungimile laturilor acestui triunghi se găseşte *BC*=a=6,7 cm., *AC*=b=9,8 cm. şi *AB*=c=10,5 cm.
b)Înălțimile triunghiului, măsurate cu rigla au valorile h_a=9,6 cm, h_b = 6,5 cm şi h_c =6,1 cm.
c)Obținem prin calcul $\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{6{,}7\cdot 9{,}6}{2}=\frac{64{,}32}{2}=32{,}16\ cm^2$, $\frac{b\cdot h_b}{2}=$ 31,85cm^2 şi $\frac{c\cdot h_c}{2}$=32,03 cm^2.
d)Semiperimetrul va fi

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{6{,}7+9{,}8+10{,}5}{2}=\frac{27}{2}=13{,}5\ cm.$$

Aria triunghiului se calculează cu formula

$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{13{,}5\cdot 6{,}8\cdot 3{,}7\cdot 3}\,.$$

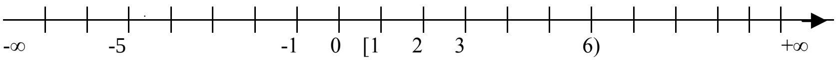
Se obține $S_{ABC}=\sqrt{1018{,}98}=31{,}92$cm^2.
e)Comparând rezultatul obținute la **a)** cu rezultatele de la **c)** observăm că s-au obținut valori destul de apropiate, ceea ce era de aşteptat deoarece toate reprezintă aria triunghiului. Rezultatul cel mai apropiat de realitate este cel care conține mai puține valori măsurate, deoarece măsurarea este principala sursă de erori.

Valoarea cea mai bună a ariei este media aritmetică a celor trei valori de la punctul **c)** şi anume $A=\frac{32{,}16+31{,}85+32{,}03}{3}$ adică *A*=32,01 cm^2.

Rezolvarea temei 2.2.

Operații cu intervale de numere reale.

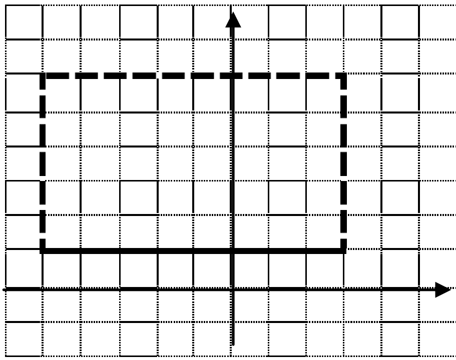
1.Fie intervalele ***I*=(-5; 3), *J*=[1; 6.), *K*=(2;** +∞**)** şi ***L*=(-**∞**; -1]**.
a)Pe axa reală intervalele se reprezintă astfel:



b) I∪J=(-5; 6), I∩K=(2; 3), J∩L∪K={2; +∞)=K.
c)Numerele întregi din *I* formează mulțimea Z∩*I*={-4; -3; -2; -1; 0; 1;2}, numerele naturale din *J* sunt *J*∩N={1; 2; 3; 4; 5}. Mulțimea *J*∩N are 5 elemente deci card(*J*∩N)=5. Avem şi Z∩(*I*∪*J*)= {-4; -3; -2; …;4; 5}.

d)Numerele întregi din *I* care nu sunt şi în *J* formează mulțimea ($Z\cap I$)\ ($Z\cap J$)={-4; -3; -2; -1; 0}. Asemănător avem ($Z\cap J$) \ ($Z\cap I$)={3; 4; 5}.

e)Produsul cartezian *I*x*J* este mulțimea formată din perechile de numere reale cu primul element din I şi al doilea din *J*. Dacă vom conveni să reprezentăm perechile de numere ca puncte din plan vom obține:



Rezolvarea temei 2.3.

Evaluare.

I.Fie numerele a=0,7; b=0,637; c=0,43; $d=\frac{2}{5}$. Obținem:

1. $a+b$=0,7+0,637=1,337.

2. $a-c$=0,70-0,43=0,27.

3. $c-b$=0,430-0,637= -0,207.

4. $a+d$=0,7+0,4=1,1 sau $a+d=\frac{7}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7+4}{10}=\frac{11}{10}$.

5. $2a-5b$=2·0,7-5·0,637=1,4-3,185= -1,785.

6. Suma dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre numerele date este b-d=0,637+0,4=1,037.

7. $a\cdot c$=0,7·0,43=0,301.

8. $b\cdot d$=0,637·0,4=0,2548.

9. $b:d$=0,637:0,4=6,37:4=1,4925.

II. Fie numerele p=8 şi q= -5.

1. 2:$p\cdot q$=2:8·(-5)= -0,25·5=-1,25.

2. $p^2=8^2$=64.

3. $q^3=(-5)^3= -125$.
4. $p^{-1}=8^{-1}=1:8=0,125$.
5. $p^{-2}=8^{-2}=1:64=0,015625$.
6. $p:q-q:p=8:(-5)-(-5):8= -1,6+0,625= -0,975$.
7. $\sqrt{p}=2,828\ldots$ (cu cel puțin două zecimale)
8. $\sqrt{p^2+q^2}-(\sqrt{p^2}+\sqrt{q^2})=\sqrt{64+25}-(|8|+|-5|)=\sqrt{89}-13$ $\cong 9,43-13= -3,57$
9. $\sqrt{p^2+q^2+2pq}-\sqrt{p^2+q^2-2pq} = \sqrt{(p+q)^2}-\sqrt{(p-q)^2}=|p+q|-|p-q|=|8-5|-|8+5|=3-13= -10$.

Rezolvarea temei 3.1.

Propoziție. Predicat.

1. Fie predicatele definite pe Z astfel: *p(x)*: *"*$4\cdot x+1$ *este număr prim"* şi $q(x)$: "$\frac{3x-2}{x+6}\in Z$"

a) $p(1)$: „$4\cdot 1+1$ este număr prim" care este evident adevărată. $q(2)$: "$\frac{3\cdot 2-2}{2+6}\in Z$" adică $q(2)$: "$\frac{4}{8}\in Z$" deci $q(2)$ este falsă.

b)Pentru $x=1$ se obțin propozițiile: $p(1)$: „5 este număr prim"; $q(1)$: „$\frac{1}{7}\in Z$"; $\rceil p(1)$: „5 nu este număr prim"; $p(1)\wedge q(1)$: „ 5 este număr prim şi $\frac{1}{7}\in Z$ "; $p(1)\vee q(1)$: „ 5 este număr prim sau $\frac{1}{7}\in Z$ "; $p(1)\rightarrow q(1)$: „5 nu este număr prim sau $\frac{1}{7}\in Z$". Valorile de adevăr vor fi scrise pe primul rând din tabel.

Pentru $x=2$ se obțin propozițiile: $p(2)$: „9 este număr prim"; $q(2)$: „$\frac{1}{7}\in Z$"; $\rceil p(1)$: „5 nu este număr prim"; $p(1)\wedge q(1)$: „ 5 este număr prim şi $\frac{1}{2}\in Z$ "; $p(2)\vee q(2)$: „ 9 este număr prim sau $\frac{1}{2}\in Z$ "; $p(2)\rightarrow q(2)$: „9 nu este număr prim sau $\frac{1}{2}\in Z$". Valorile de adevăr vor fi scrise pe al doilea rând din tabel.

Asemănător, pentru $x=0$ se obțin propozițiile: $p(0)$: „1 este număr prim"; $q(0)$: „$-\frac{1}{3}\in Z$"; $\rceil p(0)$: „1 nu este număr prim"; $p(1)\wedge q(1)$: „ 1 este număr prim şi $-\frac{1}{3}\in Z$"; $p(0)\vee q(0)$: „ 1 este număr prim sau $-\frac{1}{3}\in Z$"; $p(0)\rightarrow q(0)$: „1 nu este număr prim sau $-\frac{1}{3}\in Z$". Valorile de adevăr vor fi scrise pe ultimul rând din tabel.

x	*p(x)*	*q(x)*	$\rceil$*p(x)*	*p(x)∧q(x)*	*p(x)∨q(x)*	*p(x)→q(x)*
1	*A*	*F*	*F*	*F*	*A*	*F*
3	*F*	*F*	*A*	*F*	*F*	*A*
0	*A*	*F*	*F*	*F*	*A*	*F*

c)Primele numere naturale *x* pentru care 4*x*+1 este număr prim sunt : 0; 1; 3; 4; 7; 8. Din predicatul *q*(*x*) se obține $\frac{3x-2}{x+6}\in$Z⇔ $\frac{3x+18-18-2}{x+6}\in$Z ⇔ $\frac{3(x+6)-20}{x+6}\in$Z ⇔ 3-$\frac{20}{x+6}\in$Z ⇔ *x*+6∈{± 1; ±2; ±4; ±5; ±10; ±20}⇔ x∈{± 1-6; ±2-6; ±4-6; ±5-6; ±10-6; ±20-6}. Rezultă că pentru *x*=4, de exemplu avem *p*(4): „17 este număr prim” şi *q*(4): „ $\frac{13\cdot 4-2}{4+6}$ ∈Z” care sunt propoziții adevărate. Deci ∃*x*, *p*(x)∧*q*(x).

Rezolvarea temei 3.2.

Cuantificatori.

1.Fie predicatele *p(x)*: *”3·x²-5*x+2=0 , *x*∈R*”* şi *q(x)*: 6*x*< 10+5, *x*∈R”.

a) *p*(1): $3\cdot 1^2$ -5·1+2=0” adică *p*(1): „3-5+2=0” este adevărată şi *q*(2): „12<15” este adevărată.

b)Ecuația $3x^2-5x+2=0$ are $\Delta=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2$, adică Δ=1 deci are două soluții reale: $x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 3}$, $x_1=1$ şi $x_2=\frac{2}{3}$, deci din predicatul *p*(*x*) se vor obține propoziții adevărate pentru *x*∈{1; $\frac{2}{3}$ }.

Inecuația 6*x*<15 are soluțiile reale *x*<$\frac{15}{6}$, adică *x*<$\frac{5}{2}$, sau *x*∈(-∞; $\frac{5}{2}$) . Mulțimea de adevăr a predicatului *q*(*x*) va fi deci *x*∈(-∞; $\frac{5}{2}$) .

c)Dacă vom alege un număr real oarecare diferit de 1 şi de $\frac{2}{3}$, de exemplu *x*=2, atunci propoziția *p*(2) este falsă, deci (∀*x*)*p*(*x*) este falsă. Am dovedit la punctul **b)** că, de exemplu, propoziția *q*(0) este adevărată, deci (∃*x*)*q*(x) este adevărată şi rezultă imediat şi că, de exemplu, $\rceil$*q*(0) va fi falsă deci nu este adevărată afirmația (∀*x*)$\rceil$*q*(*x*). Deoarece, de exemplu, *p*(2) este falsă rezultă că (∃*x*)$\rceil$*p*(x) este adevărată.

Observație.

Propoziția $(\exists x)\rceil p(x)$ care este adevărată este negația propoziției $(\forall x)p(x)$ care este falsă. Asemănător, $(\forall x)\rceil q(x)$ care este falsă reprezintă negația propoziției $(\exists x)q(x)$ care este adevărată.

Dacă reunim mulțimile de adevăr ale celor două predicate constatăm că $R\setminus(\{0; 1; 2\}\cup(-\infty; \frac{5}{2}))\neq\emptyset$, deci $(\forall x)\ (p(x)\vee q(x))$ este falsă.

Rezolvarea temei 3.3.

Operații logice elementare (negație, conjuncție disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile și relațiile cu mulțimi.

1. Fie mulțimile $A=\{-3; 0; 1; 4; 5\}$ şi $B=\{-3; -1; 2; 4; 6; 7\}$ şi predicatele $p(x)$: $x\in A$ şi $q(x)$: $x\in B$.

a) Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este A, iar cea a predicatului q(x) este B. Rezultă că $p(x)\wedge q(x)$ are ca valori de adevăr elementele care sunt şi din A şi din B adică din mulțimea $A\cap B=\{-3; 0; 1; 4; 5\}\cap\{-3; -1; 2; 4; 6; 7\}$, deci din mulțimea $A\cap B=\{-3; 4\}$.

b) Raționând asemănător ca la răspunsul precedent, mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)\vee q(x)$ este formată din elementele care sunt fie în A, fie în B deci vor fi din mulțimea $A\cup B=\{-3; 0; 1; 4; 5\}\cup\{-3; -1; 2; 4; 6; 7\}$, adică din $A\cup B=\{-3; 0; 1; 4; 5; -1; 2; 6; 7\}$.

c) Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)\wedge\rceil q(x)$ este formată din elementele care aparțin mulțimii A şi nu aparțin şi mulțimii B, deci vor fi cele din mulțimea $A\setminus B=\{-3; 0; 1; 4; 5\}\setminus\{-3; -1; 2; 4; 6; 7\}$, adică din $A\setminus B=\{0; 1; 5\}$.

d) Mulțimea de adevăr a predicatului $\rceil p(x)$ este $Z\setminus A$, iar pentru $\rceil q(x)$ este $Z\setminus B$. Rezultă că mulțimea de adevăr a predicatului $\rceil p(x)\wedge\rceil q(x)$ este formată din elementele comune a celor două mulțimi adică $(Z\setminus A)\cap(Z\setminus B)$ care coincide cu mulțimea $Z\setminus(A\cup B)$.

Rezolvarea temei 4.1.

Exerciții cu operații logice elementare.

1. Fie predicatele *p(x)*: ”$|5x-8|<7$, $x\in R$” şi *q(x)*: „$6-3x^2\geq -10$, $x\in R$”.

a) Inecuația $|5x-8|<7$ se poate scrie astfel $\begin{cases}5x-8<7\ ,\ 5x-8>0\\ -5x+8<7, 5x-8\leq 0\end{cases}$’

adică $\begin{cases} 5x < 15\,,\ 5x > 8 \\ -5x < -1,\ \ 5x \le 8 \end{cases}$, sau $\begin{cases} x < 3\,,\ x > \frac{8}{5} \\ x < \frac{1}{5},\ \ x \le \frac{8}{5}, \end{cases}$ sau $\begin{cases} x \in (\frac{8}{5}, 3) \\ x \in (-\infty, \frac{1}{5}) \end{cases}$.

Avem două intervale a căror reuniune reprezintă mulțimea soluțiilor inecuației date. Mulțimea $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (\frac{8}{5}, 3)$ reprezintă mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$. Această mulțime fiind nevidă rezultă că propoziția $\exists x$, $p(x)$ este adevărată, o valoare ca exemplu fiind oricare element al mulțimii de adevăr, de exemplu, x=2, deoarece $p(2)$ este o propoziție adevărată.

b)Inecuația $6\text{-}3x^2 \ge -10$ este echivalentă cu $-3x^2 \ge -16$, adică $3x^2 \le 16$ și $x^2 \le \frac{16}{3}$ care se poate scrie sub forma $x \in (-\sqrt{\frac{16}{3}}, \sqrt{\frac{16}{3}})$ sau $x \in (-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3})$. Pentru valori în afara acestui interval din predicatul $q(x)$ se obțin propoziții false, cum ar fi, de exemplu $q(5)$. Rezultă că propoziția $\forall x$, $q(x)$ este falsă.

c)De exemplu, pentru $x=1$ se obține $p(1)$: $|5\cdot 1-8|<7$, adică $|-3|<7$ care este evident adevărată deoarece 3<7. Asemănător, $q(1)$: $6-3\cdot 1 \ge -10$, adică $3 \ge -10$, care este adevărată.

Dacă luăm altă valoare, de exemplu $x= -3$ obținem $p(-3)$: $|5\cdot(-3)-8|<7$, adică $|-23|<7$, care înseamnă $23< 7$ și evident că este falsă, iar $q(-3)$: $6-3(-3) \ge -10$, adică $9+9 \ge -10$, sau $18 \ge -10$ care este adevărată.

Aceste rezultate se sintetizează în tabelul următor:

x	Predicatul $p(x)$		Predicatul $q(x)$	
	propoziția	*A/F*	propoziția	*A/F*
1	3<7	*A*	3≥ -10	*A*
-3	23<7	*F*	18≥ -10	*A*

Rezolvarea temei 4.2.

Complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate.

1.Fie mulțimile $A_n=\{n;\ 5n+3;\ 7n^2+1;\ 2n^2+6n\}$.

a)Dând valori lui n obținem mulțimile $A_0=\{0;\ 3;\ 1)$, $A_1=\{1;\ 8\}$ și $A_2=\{2;\ 13;\ 29;\ 20\}$.

b) $A_0 \cup A_1=\{0;\ 1;\ 3;\ 8\}$, $A_0 \cap A_1=\{1\}$; $A_0 \cup (A_1 \cap A_2)= A_0 \cup \varnothing=\{0;\ 3;\ 1\}$.

c)$C_N(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_9\}$ reprezintă mulțimea formată din numerele naturale care nu aparțin reuniunii celor 10 mulțimi date. Mulțimea

$A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_9$ conține cel mult 40 de elemente, iar N are o infinitate de elemente, deci $C_N(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_9\}$ va conține o infinitate de elemente.

d)Dacă observăm, de exemplu, că mulțimile A_1 şi A_2 nu au elemente comune, rezultă că în cazul dat avem $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, deci propoziția p: „$\exists i \in$ N, $\exists j \in$ N, $i \neq j$, încât $A_i \cap A_j = \varnothing$” este adevărată pentru i=1 şi j=2.

Asemănător, Dacă observăm, de exemplu, că mulțimile A_0 şi A_1 au un element comun, rezultă că în cazul acesta avem $A_1 \cap A_2 = \{1\} \neq \varnothing$, deci propoziția q: „$\exists a \in$ N, $\exists b \in$ N, $a \neq b$, încât $A_a \cap A_b \neq \varnothing$” este adevărată.

Observații.

Dacă am fi ales alte numere inițiale pe care să le punem în spațiile libere, atunci trebuiau căutate eventual alte perechi de mulțimi pentru care să determinăm intersecțiile.

Cum se scrie demonstrația că cele două propoziții sunt adevărate indiferent care sunt coeficienții stabiliți în forma mulțimilor A_n?

Rezolvarea temei 4.3.

Evaluare.

1.Fie propoziția p: „7<2 ”. Fie predicatele $q(x)$: „5-8x>9” şi $r(x)$: „3x-2<7„ cu $x \in$ R.

1) p este evident falsă deci negația ei, $\rceil p$ este adevărată.

2) $q(2)$: „ 5-8·2>9” înseamnă „5-16>9” adică „ -11>9” care este falsă.

3) $r(0)$: „ 3·0-2<7” va fi „ -2<7” care este adevărată, deci $\rceil r(0)$ este falsă.

4) p este falsă şi $q(1)$: „5-8>9” este o propoziție falsă, deci $p \vee q(1)$ este falsă.

5)Observăm că p este falsă, deci $r(3)$ şi p nu sunt amândouă adevărate, deci $r(3) \wedge p$ este falsă.

6)Avem $q(0)$: „5-8·0>9” , adică 5>9 care este falsă. $p \rightarrow q(0)$ înseamnă $\rceil p \vee q(0)$. Dar $\rceil p$ este adevărată deci $\rceil p \vee$q(0) este adevărată adică $p \rightarrow q(0)$ este adevărată.

7)Avem $r(4)$: „$3\cdot4-2<7$", adică „$10<7$" care este falsă şi $q(-1)$: „$5-8\cdot(-1)>9$" , adică „ $5+8>9$" adevărată deci $\rceil q(-1)$ va fi falsă. Rezultă că $r(4)\vee\rceil q(-1)$ este falsă.

8) Mulțimea de adevăr a predicatului $r(x)$ se obține rezolvând inecuația $3x-2<7$, adică $3x<9$, din care se obține $x<3$ sau $x\in(-\infty;3)$. Asemănător, rezolvând inecuația $5-8x>9$ obținem $-8x>4$, adică $2x<-1$, sau $x<-\frac{1}{2}$ care se mai scrie şi ca interval $x\in(-\infty; -\frac{1}{2})$ şi aceasta este mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$. Elementele comune ale celor două intervale, adică $(-\infty;3)\cap(-\infty; -\frac{1}{2})$, care este $(-\infty; -\frac{1}{2})$ reprezintă mulțimea de adevăr a predicatului $r(x)\wedge q(x)$. Această mulțime fiind nevidă rezultă că propoziția $\exists x,\ r(x)\wedge q(x)$ este adevărată.

9)Propoziția p este falsă. Mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $(-\infty; -\frac{1}{2})$, iar a predicatului $r(x)$ este $(-\infty;3)$. Rezultă că mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)\vee r(x)$ este $(-\infty; -\frac{1}{2})\cup(-\infty;3)$ adică intervalul $(-\infty;3)$, iar pentru valori ale lui x din afara acestui interval, din predicatul $p\vee q(x)\vee r(x)$ se vor obține propoziții false, deci propoziția $\forall x,\ p\vee q(x)\vee r(x)$ este falsă.

Valorile de adevăr obținute pentru fiecare dintre propozițiile date sunt trecute în următorul tabel:

1)	$\rceil p$	**A**
2)	$q(2)$	**F**
3)	$\rceil r(0)$	**F**
4)	$p\vee q(1)$	**F**
5)	$r(3)\wedge p$	**F**
6)	$p\rightarrow q(0)$	**A**
7)	$r(4)\vee\rceil q(-1)$	**F**
8)	$\exists x,\ r(x)\wedge q(x)$	**A**
9)	$\forall x,\ p\vee q(x)\vee r(x)$	**F**

Rezolvarea temei 5.1.

Raționament prin reducere la absurd.

1.Fie numărul n= 100.
a)Suma primilor 100 numere naturale impare va fi S=1+3+5+….+199, adică S=(1+199)·50, S=200·50, deci S=10000.
b)Propoziția obținută este : „Suma a 100 numere naturale impare este 9998. Să se arate că cel puțin două dintre ele sunt egale".

Contrazicând ipoteza, să presupunem prin absurd că există 100 de numere naturale nenule impare toate diferite a căror sumă să fie 9998. Primele 100 de numere impare diferite, cele mai mici, au suma S=10000, deci mai mult decât 9998. Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi că numerele impare căutate a căror sumă să fie 9998 nu pot fi toate diferite adică cel puțin două dintre ele trebuie să fie egale.

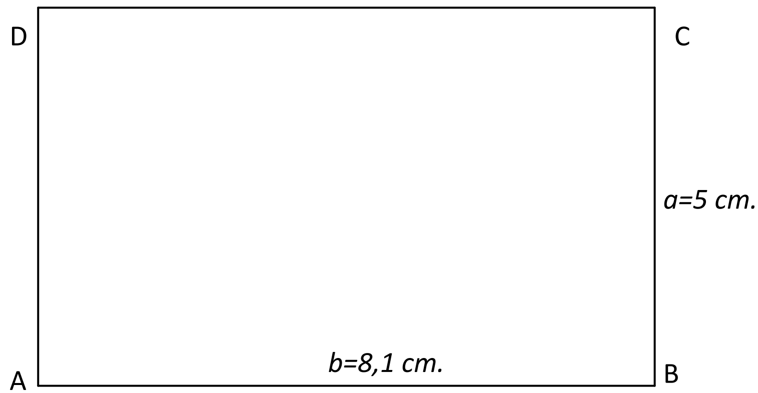
2.Fie numerele i =38, r_1 =19, j=57 şi r_2= 17. Ne întrebăm dacă: „Există un număr natural n care împărțit la i =38 dă restul r_1 =19 şi împărțit la j=57 dă restul r_2= 17?"

Presupunem prin absurd că există un număr natural n care împărțit la 38 să dea restul 19 şi împărțit la 57 să dea restul 17. Conform teoremei împărțirii cu rest avem : n=38a+19 şi n=57b+17. Deci 38a+19=57b+17 şi 19(2a+1-3b)=17. Din această relație rezultă că 17 se împarte exact la 19, ceea ce este absurd. Deducem că presupunerea făcută este falsă şi deci afirmația din enunț este adevărată.

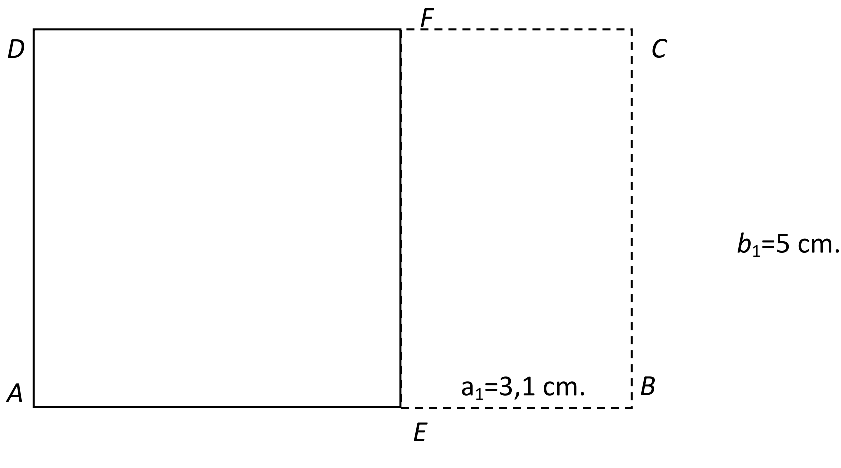
Rezolvarea temei 5.2.

Inducția matematică.

1.Calculăm cu aproximație numărul $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi obțin $\varphi \cong \frac{1+2,236}{2}$ $\cong$1,618 apoi alegem lățimea dreptunghiului *ABCD*, de exemplu, $BC=a$=5cm.,
a)Obținem prin calcul lungimea dreptunghiului *ABCD*, $AB=b=a\cdot\varphi\cong 5\cdot 1,618 \cong 8,1$cm.

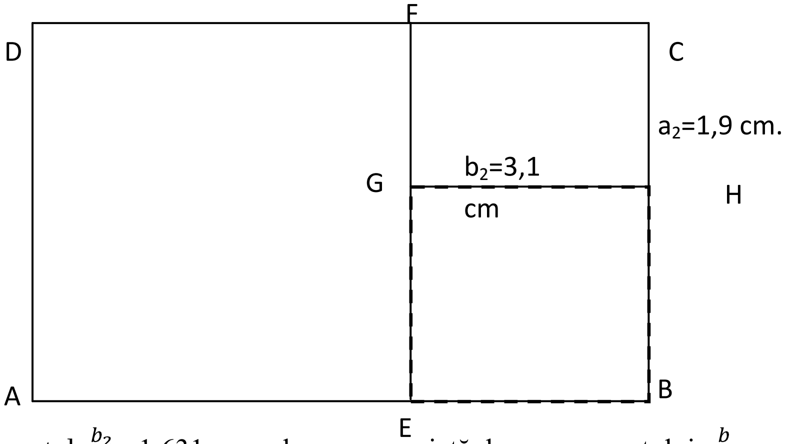


b)Împărțim dreptunghiul *ABCD* într-un pătrat *AEFD* şi un dreptunghi *EBCF*.



Măsurăm laturile noului dreptunghi *EBCF*, şi notăm lățimea lui $EB=a_1=3{,}1$ cm. şi lungimea acestuia, $BC=b_1=5$ cm. Calculând raportul $\frac{b_1}{a_1}\cong 1{,}613$ constatăm că valoarea obținută este apropiată de valoarea raportului $\frac{b}{a}\cong 1{,}618$.

c)Repetăm operațiile de la punctul b) împărțind dreptunghiul *EBCF* într-un nou pătrat şi un nou dreptunghi cu laturile a_2 şi b_2.



Raportul $\frac{b_2}{a_2}$ =1,631 are valoarea apropiată de cea a raportului $\frac{b}{a}$.

d)Demonstrez prin inducție că $\frac{b_n}{a_n} = \varphi$, $\forall$n$\in$N, unde a_n şi b_n sunt laturile dreptunghiului obținut după *n* operații efectuate ca la punctele a), b) şi c).

Avem $b_1=a$, $a_1=b-a$ şi $b=a\cdot\varphi$ deci $a_1=a(\varphi-1)$. Rezultă $\frac{b_1}{a_1} = \frac{a}{a(\varphi-1)} = \frac{1}{\varphi-1}$

Înlocuind valoarea lui $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se obține $\frac{1}{\varphi-1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$, adică prin raționalizare,

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \varphi.$$

Presupunând că proprietatea este adevărată pentru un număr natural *k* adică $\frac{b_k}{a_k} = \varphi$, care se scrie sub forma $b_k=a_k\cdot\varphi$, voi dovedi că este adevărată şi pentru succesorul acestuia adică pentru *k*+1: $\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} = \varphi$. Ținem cont că $b_{k+1}=a_k$ şi $a_{k+1}=b_k-a_k$, se obține $\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} = \frac{a_k}{b_k-a_k}$ în care $b_k=a_k\cdot\varphi$. Deci $\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} = \frac{a_k}{a_k\cdot\varphi-a_k} = \frac{1}{1-\varphi} = \varphi$. Rezultă că egalitatea dată este adevărată pentru orice $n\in$N.

Observație.

Numărul $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ este cunoscut sub numele de numărul de aur, iar lungimi a căror raport are această valoare se întâlnesc frecvent în natură, în arhitectură, în pictură, sculptură, muzică, etc. şi sunt denumite „tăietură de aur”, sau „tăietură divină”, fiind considerate „un raport armonios”.
(http://ro.wikipedia.org/wiki/Sec%C8%9Biunea_de_aur)

Rezolvarea temei 5.3.

Evaluare.

1.Fie predicatul *p*(*x*): „$\frac{5x-3}{x+7}\in$Z”, unde $x\in$Z.

a)Înlocuind, se obține *p*(1): „$\frac{5-3}{1+7}\in$Z” este falsă.

b)Printre valorile de adevăr ale predicatului *p*(*x*) se află numerele întregi *x* pentru care numitorul fracției $\frac{5x-3}{x+7}$, adică *x*+7 este egal cu 1 sau este egal cu -1. În primul caz, *x*= -6, iar în al doilea caz, *x*= -8. Deci *p*(-6) este adevărată. Rezultă că, de exemplu, $p(1)\vee p(-6)$ este adevărată.

c)Mulțimea de adevăr a predicatului *p*(*x*) este formată din valorile lui $x\in$Z pentru care $\frac{5x-4}{x+7}\in$Z, adică, $\frac{5x+35-35-3}{x+7}\in$Z, sau $\frac{5(x+7)-38}{x+7}\in$Z, sau $5-\frac{38}{x+7}\in$Z, care înseamnă $\frac{38}{x+7}\in$Z. Divizorii lui 38 sunt ±1, ±2, ±19 şi ±38. Valorile lui x pentru care *x*+7 este unul dintre aceşti divizori, adică $(x+7)\in\{\pm1; \pm2; \pm19; \pm38\}$ sunt $x\in\{-6; -8; -5; -9; 12; -26; 31; -45\}$. Din predicatul dat se obțin propoziții false dacă *x* va avea alte valori decât cele din mulțimea de adevăr, de exemplu *c*=1 şi *d*=2. Atunci $p(1)\wedge p(2)$ este falsă deoarece cel puțin una dintre cele două propoziții este falsă.

d) $p(e)\rightarrow p(f)$ se poate scrie ca $\rceil p(e)\vee p(f)$ care va fi adevărată dacă cel puțin una dintre propozițiile $\rceil p(e)$, respectiv $p(f)$ este adevărată. De exemplu, dacă *e*=1, atunci *p*(1) este falsă, $\rceil p(1)$ este adevărată şi $\rceil p(e)\vee p(f)$ care va fi adevărată indiferent cât ar fi $f\in$Z.

e)Se observă $p(g)\vee\rceil p(h)$ este aceeaşi propoziție ca la punctul d) dar se cere să fie adevărată pentru orice valori ale lui *h*, deci *p*(*g*) trebuie să fie adevărată. Rezultă că *g* trebuie să fie un element al mulțimii de adevăr a predicatului $p(x)$ adică $g\in\{-6; -8; -5; -9; 12; -26; 31; -45\}$, de exemplu $g=-6$.

f) $p(-2)$ este falsă deoarece -2 nu aparține mulțimii de adevăr a predicatului $p(x)$ şi rezultă că $p(-2)\wedge p(-1)$ este falsă.

g)Deoarece mulțimea de adevăr a lui $p(x)$ este nevidă rezultă că $\exists x, p(x)$.

h) $\rceil p(x)$ va fi propoziție falsă numai când $x\in\{-6; -8; -5; -9; 12; -26; 31; -45\}$, deci propoziția $\forall x, \rceil p(x)$ este falsă.

i) În mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$, $\{-6; -8; -5; -9; 12; -26; 31; -45\}$ nu se găsesc două numere naturale succesive n şi $n+1$, deci $p(n)$ şi $p(n+1)$ nu pot fi simultan adevărate. Rezultă că $p(n)\wedge p(n+1)$ este falsă pentru orice $n\in N$.

Bibliografie

1.L. Agnola, T. Agnola, Matematică IX (TC), Editura Mathpress, 2004.
2.Mircea Ganga, Matematică IX(TC), Editura Mathpress, 2004.
3. E. Radu, M. Ştefan, O. Şontea, Matematică IX (TC), Editura BIC All, 2006.
4. M. Burtea, G. Burtea, Matematică IX (TC), Editura Carminis,2006.
5. A. Gomolea, M. Taraş-Chirculescu, Matematică IX (TC), Editura Corint, 2006.
6. D. Andrica, B. Enescu, D. Isac, E. Jehan, I. Şerdean, Matematică IX (TC), Editura Gil. 2006.
7. C. Ştefan, V. Ştefan, Matematică IX (TC), Editura Niculescu ABC, 2006.
8. M. Singer, C. Voica, Matematică IX (TC), Editura Sigma. 2006.
9. M. Burtea, G. Burtea, Matematică IX (TC+ CD), Editura Carminis, 2004.
10. D. Săvulescu, M. Chirciu, Şt. Alexa, N. Dragomir, T. Deaconu, A. Petrescu, Matematică IX (TC+ CD), Editura Corint, 2004.
11. C. Năstăsescu, D. Mihalea, C. Niţă, I. Chiriţescu, Matematică IX (TC+ CD), Editura EDP, 2004.
12. Petre Năchilă, Ion Cheşcă, Matematică IX (TC+ CD), Editura LVS Crepuscul, 2004.
13. Cornel Ştefan, Virgil Ştefan, Matematică IX (TC+ CD), Editura Niculescu ABC, 2004.
14. C. Petcu Nicolescu, I. Maftei, A.V. Mihai, M. A. Nicolae, , Matematică IX (TC+ CD), Editura Universal Pan, 2004.
15. Paul Flondor, Octavian Stănăşilă, , Matematică IX (TC+ CD), Editura BIC All, 2004.
16. Eugen Radu, Mugurel Ştefan, Ovidiu Şontea, , Matematică IX (TC+ CD), Editura BIC All, 2004.
17. D. Brânzei, G. Constantinescu, L. Mircea, B. Singer, Gabriela Streinu-Cercel, A. Zanoschi, Gabriel Popa , Matematică IX (TC+ CD), Editura Sigma, 2006.
18.S. Ştefănescu, N. Bordeianu, Proporţionalitate în natură şi artă, Editura Conexiuni, 2002.
19.V. Schneider şi colectiv, Matematică – exerciţii şi probleme pentru clasa a IX-a, Editura Valeriu, 2002.

CUPRINS